

---

---

# ТЕОРИЯ РЕГИОНАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

---

---

УДК: 332.12:51-7

## МАТЕМАТИКО-СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЕРАРХИИ И ГЕТЕРАРХИИ ЭКОНОМИКО-ГЕОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2021 г. А.К. Черкашин\*, А.В. Мядзелец\*\*

*Институт географии им. В.Б. Сочавы СО РАН*

\*e-mail: [cherk@mail.icc.ru](mailto:cherk@mail.icc.ru)

\*\*e-mail: [anastasia@irigs.irk.ru](mailto:anastasia@irigs.irk.ru)

Изучаются особенности строения территориальных (экономико-географических) систем регионов и федеральных округов Российской Федерации в вертикальном (иерархия) и горизонтальном (гетерархия) отношении методами математического моделирования. Используется многоуровневая билинейная индикативная функция, связывающая индикаторы социально-экономического развития с учетом особенностей (нормативных показателей) экономико-географической среды регионов и их территориальной иерархии на примере зависимости ежегодных внутренних инвестиций от объемов промышленного и сельскохозяйственного производства регионов по данным 1999–2018 гг. Рассчитанные значения показателей акселерации инвестиций варьируют по временному и пространственным параметрам и отражают изменчивость экономико-географической среды на различных уровнях иерархии. В форме последовательности регрессионных уравнений статистически описывается вертикальная иерархия общероссийской экономической системы: линейные региональные тренды объединяются в группы (конгруэнции) со сходными нормами социально-экономической среды (федеральные округа) и выделяется общероссийская директивная поверхность (директриса), демонстрирующая разнообразие уровней и направлений развития регионов. В показателях связи внутренних инвестиций и объемов производства это отражает иерархию экономической системы России на региональном, окружном и федеральном уровнях, территориально образующую гетерархическую сеть подобия потенциалов экономического роста.

*Ключевые слова:* иерархическое строение, гетерархия, территориальная система, инвестиционный процесс, регион, экономико-географическая среда, математическое моделирование.

DOI: 10.5922/1994-5280-2021-4-1

**Введение и постановка задачи.** Важная особенность географических и иных пространственных систем – наличие иерархической структуры, выраженной во вложении одной составляющей в другую большего размера, ранга, порядка или уровня. Это показано по результатам районирования, типизации, классификации и моделирования геосистем. Иерархия как глобальное явление и общенаучное понятие [17; 31] исследуется с качественных и количественных позиций с использованием математических аналитических и статистических методов [30; 32] средствами, отражающими в формулах многоуровневое строение реальности.

Особенности многоуровневых систем проявляются в иерархических структурах управления [9]. Э.М. Хакимов приводит 11 определений понятия иерархии, основанных на разных аспектах выражения его содержания [17]. Вертикальной иерархии систем противопоставляется неиерархическая горизонтальная сетевая организация (гетерархия), базирующаяся на идее координации связей. Основной задачей изучения иерархий является формализация отношений между различными уровнями, которая давно ставится и решается [6], но до сих пор остается открытой [1; 6] в силу наличия в иерархии формально не выводимых друг из друга про-

тивоположных свойств [16]. Это проявляется в отличии одно- и разноуровневых классификаций или в иерархии экономико-географических районов. Общенаучный статус иерархического подхода позволяет утверждать, что иерархия и дополняющая ее гетерархия – сквозные надсистемные качества [22]. Для их понимания необходимо сформировать и применять метатеоретические и полисистемные знания [20].

Данное исследование посвящено изложению результатов применения математических методов моделирования многоуровневой иерархии и сетевой гетерархии в экономико-географических системах, формирующихся и развивающихся в различной географической среде для выявления регионального различия и сходства. Системы описываются в виде системообразующих функций различного уровня, формальное выражение которых заранее неизвестно.

**Обзор ранее выполненных исследований.** Иерархия понимается как многослойная, многоуровневая полисистема. Выделяются три системных интерпретации иерархических моделей [6]: 1) по уровням абстракции (агрегирования) моделей (стратам); 2) по уровням сложности (детальности) решаемой проблемы (слоям); 3) по уровням приоритета действия (эшелонам управления в организационной иерархии). В географии первая позиция выражается в агрегировании данных в разные функции оценки местоположений с созданием оценочных карт нескольких масштабных уровней. Вторая соответствует естественной иерархии геосистем от локального уровня до глобальных структур, отражающих, например, зональные особенности и их влияние на развитие территории. Согласно третьей позиции это развитие регулируется вышестоящими уровнями геосистем. В этом смысле вышерасположенный уровень иерархии по отношению к нижележащей геосистеме традиционно рассматривается как географическая, культурно-историческая или управленческая среда, формирующая специализацию региональных и локальных процессов и явлений. В разных вариантах иерархии воздействие осуществляется снизу-вверх (организация, агрегирование, генерализация) или сверху-вниз (регулирование, управление, субординация). Элементы вышестоящего уровня

являются «точками сборки» – свертки или развертки – структуры нижележащего уровня. Это проявляется в традиционной дихотомии знания в микро- и макроэкономике [15]. Иерархия и гетерархия также демонстрируются в теории центральных мест, моделях «центр-периферия», гравитационных и кластерных моделях, распределениях Зипфа, где описывается концентрация населения или финансов в центрах влияния, распределяющегося на соседние уровни [21; 25].

Примером гетерархической сети служат территориально-экономические кластеры – сконцентрированные на территории группы взаимосвязанных организаций, дополняющих и усиливающих развитие отдельных компаний и кластера в целом [26]. В последние десятилетия в изменяющейся экономической среде классическая иерархия эволюционирует в гибкие, децентрализованные, сетевидные структуры [28; 33] типа кластеров, жизненный цикл которых можно анализировать как мезотраекторию в многомерном пространстве состояний [34].

Выделение экономических уровней базируется на разных способах описания социального поведения [27], например, такая иерархия представлена в виде пирамид (Маслоу) или логических уровней Дилтса [4]. Имеющийся опыт моделирования естественной динамики и использования природных ресурсов также показывает, что на различных уровнях иерархии моделей необходимо использовать свои показатели состояния и коэффициенты их взаимодействия, агрегирующие показатели нижележащего уровня [18].

Создание иерархической системы моделей требует адекватного описания взаимодействия моделей разного уровня. Главной целью построения экономических моделей является повышение конкурентоспособности и эффективности всех звеньев национального хозяйства. Например, для этого используются уравнения баланса В.В. Леонтьева, а территориальные связи описываются уравнениями межрегиональных потоков [2]. Они дополняются многоуровневой системой моделей динамики природных ресурсов [3]. Модели взаимосвязи разноуровневых показателей состояния систем и их среды представлены в методах анализа иерархий (МАИ) и сетей (МАС) [10], где МАИ – инструмент системного подхода для выбора

лучшей альтернативы действия, а МАС считается более общей формой МАИ и структурирует проблему не в иерархию цели, критериев и альтернатив, а в гетерархическую сеть взаимных связей компонентов структуры с дальнейшим их попарным сравнением для измерения весов компонентов, ранжирования альтернатив при решении проблем [11].

Принципы иерархического и гетерархического порядка и связности отображаются в моделях ранговых распределений элементов систем по их встречаемости или значимости, например, с помощью степенного распределения Зипфа описывается упорядоченность городов по численности населения [25]. Ранговые распределения моделируются степенным уравнением Парето, в частности, отражающим фрактальное строение [29]. Для иерархической классификации объектов привлекаются также методы многомерной статистики, в частности, кластерного [35], корреляционного анализа, метода главных компонент.

Для понимания сущности иерархических и гетерархических структур используется их качественное представление в виде схем-графов и количественное описание алгебраическими, дифференциальными и конечно-разностными, в основном линейными, уравнениями, позволяющими проводить математический анализ и осуществлять расчеты [1; 12; 14]. Новые возможности для моделирования сетевых структур дает расслоение оргграфов, что используется для описания социальных групп, порождаемых общественной стратификацией, когда порядок слоев устанавливает значимость групп в организационной системе [13].

Приведенные примеры показывают, что с формальной точки зрения иерархические и гетерархические сетевые модели существенно не отличаются, и в обоих случаях могут быть использованы сходные формализмы для описания вертикальных и горизонтальных связей объектов [22].

**Модели и методы исследования.** Иерархию будем рассматривать как последовательность вложенных друг в друга по гнездовому принципу структур  $S_j \subset S_i$  (ряды подмножеств, подсистем), которые линейно упорядочены так, что отношение порядка  $S_j < S_i$  предполагает определенное доминирование  $S_i$  над  $S_j$ , например, когда отдельный район территориально включен в область и подчиняется ее государственно-административным условиям существования (рис. 1). Логически это означает что свойства  $S_j$  дедуктивно следуют из свойств  $S_i$  ( $S_i \Rightarrow S_j$ ), а качества  $S_i$  индуктивно определяются (агрегируются) свойствами всех  $S_j \subset S_i$ . В общем случае в иерархических схемах (графах) реализуются различные варианты линейного порядка сверху вниз и снизу вверх (см. рис. 1).

Различаются простые линейные (рис. 1а) и сложные разветвленные иерархии (рис. 1б) и гетерархии (рис. 1в), где соответственно существуют одно- и разнонаправленные влияния. Прямое воздействие сверху вниз определяет эволюционную, территориальную, типологическую и иные процедуры дифференциации, обратное влияние снизу вверх – интеграцию процессов, явлений и понятий. Сетевые гетерархические структуры (рис. 1в) имеют один или несколько центров (S) пространственной организации, вокруг

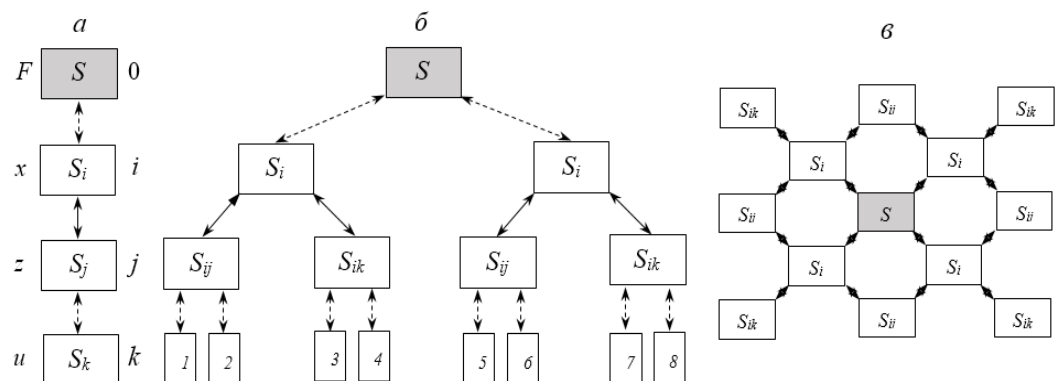


Рис. 1. Простая (а) и сложная разветвленная (б) схема-граф иерархической и гетерархической (в) организации (пояснения в тексте)

которого радиально и кругами формируются связанные с ним и между собой элементы ядра ( $S_i$ ) и периферии ( $S_{j^*}$ ,  $S_k$ ). В гетерархии выделяется архетип – план строения, особенности которого идеально отражаются в математической модели, объясняющей природу иерархии [21; 22]. Архетип – модель центрального типа, например, в географии – кольцевая модель изолированного государства И.Г. фон Тюнена или ячейки сетевой модели центральных мест В. Кристаллера.

Каждый уровень иерархии характеризуется набором нескольких системных функций  $F(x)$  и переменных  $x = \{x_i\}$ ,  $z = \{z_j\}$ ,  $u = \{u_k\}$ , упорядоченных в цепочку причинных зависимостей снизу вверх  $u \rightarrow z(u) \rightarrow x(z) \rightarrow F(x)$  суперпозицией функций  $F[x(z(u))]$ , последовательно свертывающих детальную информацию  $u$  в интегральную  $F$  (см. рис. 1). Эти переменные непрерывно параметризуются пространственными координатами местоположения  $\zeta$  и временем  $t$ :  $F[x(\zeta, t)]$ . Каждая характеристика – это отдельная величина или набор-вектор переменных вида  $x = \{x_i\}$ .

Для математико-статистического анализа желательно, чтобы агрегирующая, метрологическая функция вида  $F(x)$ ,  $x = \{x_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  была и проста, и универсальна, а также являлась гладкой, многократно дифференцируемой по каждому аргументу, в частности, раскрывалась с помощью связанных универсальных формул полного дифференциала (1), касательного преобразования Лежандра (2) и ряда Тейлора (3):

$$dF(x) = a \cdot dx = \sum_{i=1}^n a_i dx_i, \quad (1)$$

$$a_i(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}$$

$$F(x) = T_x F(x) + F^*(a) = a \cdot x + F^*(a) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + F^*(a), \quad (2)$$

$$a_i(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}, \quad x_i(a) = -\frac{\partial F^*(a)}{\partial a_i}$$

$$F(x) - F(x_0) = G(x) = \sum_{r=1}^l \frac{T_x^r F(x)}{r!} \Big|_{x=x_0} + \dots = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=x_0} + \dots, \quad (3)$$

$$T_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x_i, \quad T_y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} y_i \quad (4)$$

Выражение  $f(y) = T_x F(x) = a \cdot x$ , равное сумме произведений  $a_i x_i$ , есть скалярное произведение вектора  $x = \{x_i\}$  на ковектор  $a = \{a_i\}$ . Величины  $y = \{y_i\}$ ,  $y_i = x_{0i}$  смещены относительно  $x_{0i}$  (исходных показателей элементов иерархии вышележащего уровня) и являются значениями локальных координат с началом в точке  $x_0 = \{x_{0i}\}$ . Величина  $y_i = x_i - x_{0i}$  и ее влияние на  $f(y)$  зависит от характеристики верхнего уровня  $x_{0i}$ , увеличение давления которой снижает значение  $y_i$ .

Коэффициенты  $a_i$  – это частные производные, коэффициенты чувствительности, факторные нагрузки, определяющие по выражению (2) величину изменения функции  $dF(x)$  при изменении только аргумента  $dx_i$ . Переменные  $a$  обеспечивают связи между уровнями, например, в системах иерархического управления значение  $a_i$  оценивает увеличение предельной нагрузки на местное руководство при введении в территориальную структуру и организацию нового поселения. Развитие гетерархической системы  $F(x)$  предполагает, что, получая что-то от территории, каждое поселение должно отдавать нечто взамен ( $a_i > 0$ ). В итоге организационная система через функции  $F(x)$  и  $F^*(a)$  раскрывает возможности проявления инновационной деятельности.

Величины  $a = \{a_i\}$  и  $x = \{x_i\}$  являются двойственными переменными. Допускаются прямые и обратные преобразования  $F(x) \leftrightarrow F^*(a)$ , когда по организационной функции  $F^*(a)$  можно судить о свойствах системной функции  $F(x)$ . Следовательно, функции, связывающие уровни иерархии, существуют в двух видах: как функции системы  $F(x)$  и функции организации  $F^*(a)$ .

Формула (3) – аналитическое представление функции  $F(x)$  нескольких действительных переменных  $x = \{x_i\}$  рядом Тейлора в окрестности точки  $x_0 = \{x_{0i}\}$ , где  $F(x) = F(x_0)$ . Функция отклонений  $f(y) = F(x) - F(x_0)$  здесь тождественна  $G(x)$ . Это многочлен, коэффициенты которого пропорциональны значению производных разного порядка в точке  $x_0$ . Функция  $G(x)$  обладает линейной иерархией  $F(x) = F(x_0) + G(x)$ , где каждое последующее слагаемое  $G_r(x)$  уточняет функцию  $G(x)$ . Верхний уровень этой иерархии  $r = 1$  соответствует линейной функции, содержащей основную информацию об изменчивости:

$$\begin{aligned}
 f(y) &= G_1(x) = T_x F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} y_i = \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} y_i = \sum_{i=1}^n a_i y_i = a \cdot y, \quad a_i = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \quad (5)
 \end{aligned}$$

В уравнении  $f(y) = a \cdot y$ , линейном, относительно каждого набора переменных  $a$  и  $y$ , принимается во внимание, что  $y = x - x_0$ , где переменными величинами в общем случае являются  $x = \{x_i\}$  и  $x_0 = \{x_{0i}\}$ .

Обычно зависимость (5) рассматривают как линейную аппроксимацию наблюдаемых взаимосвязей  $F(x)$  с определенной точностью – статистической ошибкой  $\varepsilon$  приближения:  $F(x) = F(x_0) + f(y) + \varepsilon$ . Гипотеза линеаризации предполагает, что в некоторых диапазонах значений переменных  $x$  (центра, ядра и достаточно широкой периферии) их влияние на  $F(x)$  достоверно остается линейной, что облегчает аналитическое исследование, информационное обеспечение и статистический анализ явления, использование для выявления оптимальных решений. Обычно предлагаются линейные системы уравнений  $F(x) = b + a \cdot x$  вида (5) с постоянными коэффициентами  $a = \{a_i\}$  и  $b$ . Для определения значений коэффициентов данные обрабатываются методами многомерной статистики с применением регрессионных и иных подходов. Линеаризация связей осуществляется не только за счет аппроксимации, но и другими способами, например, логарифмированием.

Вместе с тем, если, как в формуле (1), считать  $a = \{a_i\}$  переменными величинами, то уравнения вида  $f(y) = a \cdot y$  являются билинейными, т.е. линейными и по набору переменных  $y = x - x_0$ , и по набору переменных  $a$ , соответствующих разным функциям  $f(y) = \varphi(y, a) = \psi(x, x_0, a)$ . Функция  $f(y) = a \cdot y$  представляет собой пучок (конгруэнцию) линий, плоскостей или гиперплоскостей, где линии или плоскости поворотом вокруг начальной точки  $x_0 = \{x_{0i}\}$  переходят одна в другую, что указывает на наличие комплекса симметричных координационных взаимосвязей в системе. Один и тот же набор переменных  $x = \{x_i\}$ , но с разным положением центра верхнего уровня  $x_0 = \{x_{0i}\}$  дает разные результаты  $f(y)$  в локальной системе координат  $y = \{y_i\}$ . Для выделения положения цен-

тра статистически выявляются зависимости  $F(x) = b + a \cdot x$  для частных пространственных и временных интервалов с различными наборами коэффициентов  $a$  и  $b$ . Находится линейная зависимость  $b(a) = -a \cdot x_0 + b_0$  с определением  $x_0$  и  $b_0 = F(x_0)$ , откуда получаем уравнение  $f(y) = F(x) - F(x_0) = a \cdot (x - x_0) = a \cdot y$ , которое описывает пучок плоскостей с центром в точке  $x_0$ . В разных вариантах наблюдения  $F(x)$  положение центра  $x_0$ , характеризующее однородность условий наблюдения, сохраняется, что индицируется достоверностью связи коэффициентов  $b(a) = -a \cdot x_0 + b_0$ . Смена собственно положения  $x_0$  указывает на изменение ситуации, трансформацию условий в пространстве или во времени, что можно использовать в качестве критерия для типизации и районирования объектов по оценочной функции  $F(x)$ . Поскольку центрированная относительно  $x_0$  зависимость  $f(y) = a \cdot y$  одинакова в разных условиях, ее наличие указывает на подобие функциональных связей разных районов или отраслей, что говорит о комплексности пространственных связей и доказывает существование территориальной организации [19].

Преимуществом формул (4) является сохранение билинейности в суперпозиции связей в иерархических структурах. Действительно, если  $f(y) = a \cdot y$  и  $y = b \cdot z$ , то

$$\begin{aligned}
 f(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} y_i, \quad y_i(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial z_j} z_j, \\
 f(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial z_j} z_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_j} z_j
 \end{aligned}$$

в силу

$$\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial z_j},$$

где  $f(y(z)) = \varphi(z) = c \cdot z$  – билинейное соотношение. Такой вложенностью обладают различные связи вида  $F(x) = b + a \cdot x$ , но конгруэнтные свойства зависимости  $f(y) = a \cdot y$  характерны только для пучков связей (архетипов), т.е. при наличии общего центра  $x_0$ . Переход от функции общего вида  $F(x)$  к билинейной накладывает на математические соотношения дополнительные ограничения. Для уравнения (1) это предполагает, что формула полного дифференциала справедлива не только для дифференциалов  $dF$  и  $dx$ , но и конечных разностей – отклонений вида  $f(y) = F(x) - F(x_0)$  и  $y = x - x_0$ . Тогда

в уравнении (2) функция Лежандра  $F^*(a) = -a \cdot x_0 + F(x_0)$  – это билинейная функция с экстремальным при  $a = 0$  значением  $F(x) = F^*(a) = F(x_0) = F_0$ .

Эта позиция  $x_0$  верхнего уровня может закономерно перемещаться по поверхности  $F(x_0)$  вместе с пучком линий  $f(y) = a \cdot y$ , что порождает фрактальную структуру иерархической организации (рис. 2), выраженную в самоподобии разномасштабных пучков (архетипов) различного положения. Кривая эволюции положения центра на  $F(x_0)$  описывается функцией-директрисой на поверхности, заданной многообразием связи  $F(x)$ . Если придерживаться гипотезы сохранения билинейности на всех уровнях, директриса должна задаваться линией  $F(x_0) = a_0 \cdot x_0 + F^*(a_0)$  пучка линий, где  $F^*(a_0) = -a_0 \cdot x_{01} + F(x_{01})$ , с координатами центра  $x_{01} = \{x_{01}\}$ , который также лежит на линии вышестоящего по иерархии пучка с центром  $x_{01} = \{x_{01}\}$  и т.д. (см. рис. 2). Так формируется иерархическая последовательность экономико-географических условий локального (A), регионального (B) и национального (C) и глобального (D) уровней. На рис. 2 также представлена ситуация, когда локальная позиция A изначально рассматривается в разных средовых условиях  $x_0$  и с индивидуальной чувствительностью  $a = \{a_i\}$  – показателем наклона линий или плоскостей.

Билинейные функции  $f(y) = a \cdot y$  – в общем случае функции нелинейные. Они соот-

ветствуют дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка (5)

$$f(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} y_i, \quad (6)$$

решения которых находятся с помощью вычисления первых интегралов [5; 23]  $c = \{c_i\}$  и  $C = \{c_{ij}\}$ :

$$c_i = \frac{f(y)}{y_i}, c_{ij} = \frac{y_j}{y_i} \quad (7)$$

Для всех решений эти соотношения постоянны. Общий вид решения – это однородные функции, являющиеся в локальной системе координат  $y = \{y_i\}$  метриками факторного расстояния [24] вида

$$f(y) = y_i \Phi_i(c, w), c_i = y_i / y_j, y_i = f(y) \Phi_i^{-1}(c, w),$$

где  $\Phi_i(c, w)$  – произвольная функция первых интегралов (7) и  $w = \{w_i\}$  – неопределенных (местных) весовых коэффициентов. Нелинейная функция  $\Phi_i(c, w)$  связывает пропорциональной зависимостью характеристики  $y_i$  системы нижележащего уровня с состоянием  $f(y)$  системы верхнего  $y_i = f(y) / \Phi_i$ . Билинейные уравнения могут применяться для математического и статистического анализа зависимостей разного типа, включая балансовые экономические соотношения, в моделях динамики систем, при кардиналистской

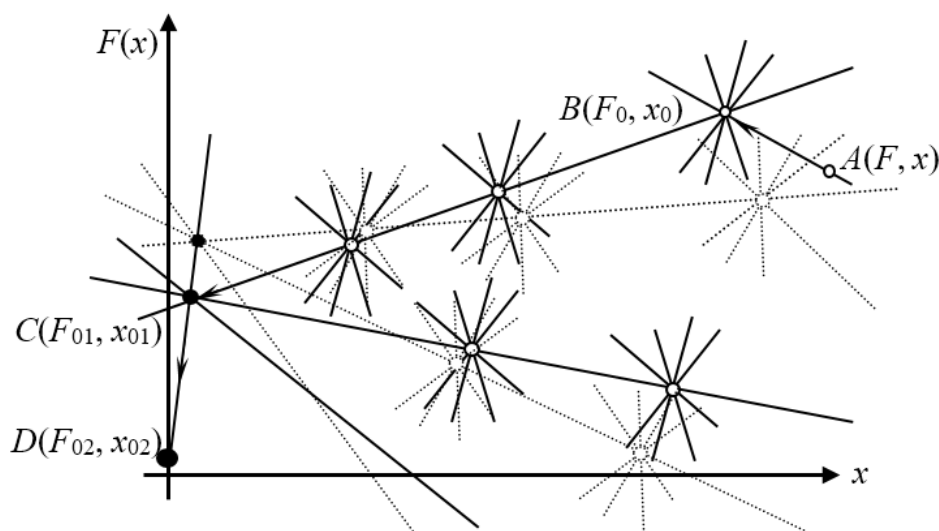


Рис. 2. Схема иерархической организации пространственной экономики (пояснения в тексте)

оценке ресурсов и недвижимости, в теориях стоимости, полезности, производственных функций, функций синтеза приоритетов и т.д. Выбор оценочных функций  $F(x)$  и  $f(y)$  достаточно широк, но все они должны удовлетворять универсальному уравнению (6). Ж. Фиоретти [28] для оценки устойчивости организационных форм работы фирм предлагает использовать функцию Ляпунова  $f(y)$ , зависящую от показателей  $y_i$ , потери информации и степени дублирования операций; при этом система находится в состоянии устойчивого равновесия в окрестности точки  $y = 0$ , если  $f(0) = 0$ ,  $f(y) > 0$  и  $fd(y) < 0$  в уравнении вида (6), что характерно, например, для функции полезности в экономике.

**Полученные результаты.** Сравнительное исследование территориальной иерархии выполняется на примере федеральных округов (ФО) Российской Федерации (РФ). Рассматривается зависимость индикативной функции  $F(x)$  (индиката) – величины ежегодных валовых внутренних инвестиций (ВВИ)  $F(x)$  (млн руб.) (позиция А рис. 2) от величины индикаторов – объемов промышленного  $x_1$  (млн руб.) и сельскохозяйственного производства  $x_2$  (млн руб.) региона по данным государственного комитета статистики РФ за 1999–2018 гг. Статистические расчеты проводятся по формуле (2) в частном виде

$$\begin{aligned} F(x) &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + F^*(a), x = \\ &= \{x_1, x_2\}, a = \{a_1, a_2\} \end{aligned} \quad (8)$$

методом регрессионного анализа с определением для каждого региона коэффициентов  $a = \{a_1, a_2\}$  и  $F^*(a)$ . В данном случае величина  $a_1$  имеет смысл коэффициента акселерации (акселератора) – показателя, указывающего насколько каждый млн рублей приращенного дохода в  $i$ -ой отрасли увеличивает ежегодные ВВИ в экономику региона (предельные инвестиции по объемам производства). Акселератор  $a_1$  промышленного производства по регионам России в интервале 1999–2018 гг. территориально варьирует в пределах от 0,15 до 1,33 с общей зависимостью  $F(x) = 0,265x_1 + 9323$  (коэффициент детерминации  $R^2 = 0,90$ ), т.е. на каждый млн рублей дополнительного дохода приходится 0,265 млн рублей прироста инвестиций.

Значения коэффициентов акселерации изменяются со временем по регионам. Для

оценки текущих значений  $F^*(a)$  и  $a = \{a_1, a_2\}$  уравнений (8) используется метод скользящей регрессии. Большие положительные значения  $F^*(a)$  указывают на благоприятные внешние политико-экономические условия производства, наименьшие отрицательные – на кризисные ситуации, приходящиеся на проблемные 1999, 2008 и 2014 годы политических и финансово-экономических кризисов (рис. 3). Региональные экономики по этому показателю по-разному реагируют на текущую обстановку. Существуют проектно-плановые и внешние иностранные инвестиции в территориальное развитие, напрямую не связанные с объемами производства, что идентифицируется высокими значениями акселерации и даже смещением устойчивых характеристик экономико-географической (природно-хозяйственной) среды (ЭГС)  $F_0$  и  $x_0$  региона. В последние годы прослеживается общая тенденция роста изменчивости  $F^*(a)$  – статистической функции Лежандра, показателя влияния скрытых внутренних характеристик  $a$  и внешних  $x_0$  условий производства верхнего уровня иерархии  $x_0$ .

Чистые ВВИ  $f(y) = a \cdot y$  – это ВВИ  $F(x)$  за вычетом той части  $F_0 = F(x_0)$ , которая идет на замену оборудования и сооружений:  $f(y) = F(x) - F(x_0)$  – свободные инвестиции, что увеличивают запасы капитала предприятий и их производственные возможности  $x = y + x_0$ . Здесь  $x_0$  и  $F_0$  определяют ЭГС – природно-хозяйственную среду производства. Эти значения характеризуют устойчивые нормы производства  $x_0$  и инвестирования  $F_0$  региона. Хозяйственная среда  $F_0$  в основном определяется величиной амортизационных отчислений. Сюда же относятся транзакционные издержки. Величина  $F_0$  также связана с рисками хозяйственной деятельности, зависящими от суровости природных условий и компенсирующего влияния инфраструктурной освоенности. На величину  $F_0$  благоприятно влияют внешние инвестиции, так как они повышают эффективность чистых ВВИ  $f(y)$ . Влияние теневой экономики учитывается в показателях  $x_0$  и  $F(x_0)$ . Поскольку коэффициенты зависимости  $F(x) = a \cdot y + F_0$  статистически рассчитываются по исходным данным, выявленные по регионам значения  $x_0$  и  $F_0$  интегрально учитывают скрытые причины, устойчиво влияющие на хозяйственную среду региона.

Для выявления региональных средовых значений  $F_0$  и  $x_0$  используются таблицы статистической зависимости  $F^*(a)$ , которая по всему временному интервалу аппроксимируется средствами регрессионного анализа уравнением  $F^*(a) = -x_{01}a_1 - x_{02}a_2 + F_0$ , где  $-x_{01}, -x_{02}, F_0$  рассчитываются как коэффициенты регрессии. Например, для Иркутской области  $F^*(a) = -503483a_1 - 33931a_2 + 83481$  ( $R^2 = 0,87$ ) с координатами  $x_{01} = 503483, x_{02} = 33931$  на многообразии  $F(x_0)$  ЭГС и со значением нормы ВВИ  $F(x_0) = F_0 = 83,48$  млрд руб., характеризующей масштаб развития экономики области. Соответствующее универсальное уравнение имеет вид

$$f(y) = a_1 y_1 + a_2 y_2, \quad (9)$$

где  $f(y) = F(x) - 83481, y_1 = x_1 - 503483, y_2 = x_2 - 33931$ . При  $f(y) = 0, y_2 = -(a_1 / a_2) y_1 = a_{12} y_1, a_{12}$  – коэффициент замещения  $y_1 \rightarrow y_2$  в различных экономико-географических обстоятельствах разных. Уравнения (9) во всех регионах однотипны. Они представляют пучок линий разной ориентации и различаются лишь положением центра пучка на многообразии  $F(x_0)$  (позиций  $B$ , рис. 2).

Аналогичные показатели  $[F(x_0), x_{01}, x_{02}]$  для соседнего Красноярского края равны  $[143077, 650241, 46183]$  ( $R^2 = 0,92$ ).

Различие нормы индикативных функций  $\Delta F(x_0) = 143077 - 83481 = 59596$  млн руб. определяют направление (директрису) экономико-географической территориальной изменчивости. Добавление данных по Алтайскому краю  $[63361, 239718, 105133]$  ( $R^2 = 0,92$ ) позволяет рассчитать линейное уравнение пространственной директрисы, отражающей региональную гетерархию:  $F(x_0) = a_{01}x_{01} + a_{02}x_{02} + F^*(a_0) = 0,328x_{01} + 0,933x_{02} + 113415$ . В рассматриваемой территориальной системе пространственный градиент  $a_0 = \{a_{01}, a_{02}\}$  смещения экономико-географических условий по промышленному производству  $(0,328)$  ниже, чем по сельскому хозяйству  $(0,933)$ .

Подобным образом для каждого региона по всему временному ряду связи данных находим линейную зависимость  $F^*(a) = -a_1x_{01} - a_2x_{02} + F(x_0)$  с определением региональных норм  $x_{01}, x_{02}, F(x_0)$  с  $R^2 = 0,8$  (рис. 4). Для регионов Сибирского ФО по данным 1999–2018 гг. они представлены в таблице 1. Графически зависимости  $F(x_0)$  отражают директрисы территориальной и временной изменчивости ЭГС по ФО (рис. 5), а в сетевой гетерархии – соседство регионов [7, с. 79].

Далее, для группы регионов каждого ФО по данным таблиц вида 1 создается таблица 2 коэффициентов зависимости

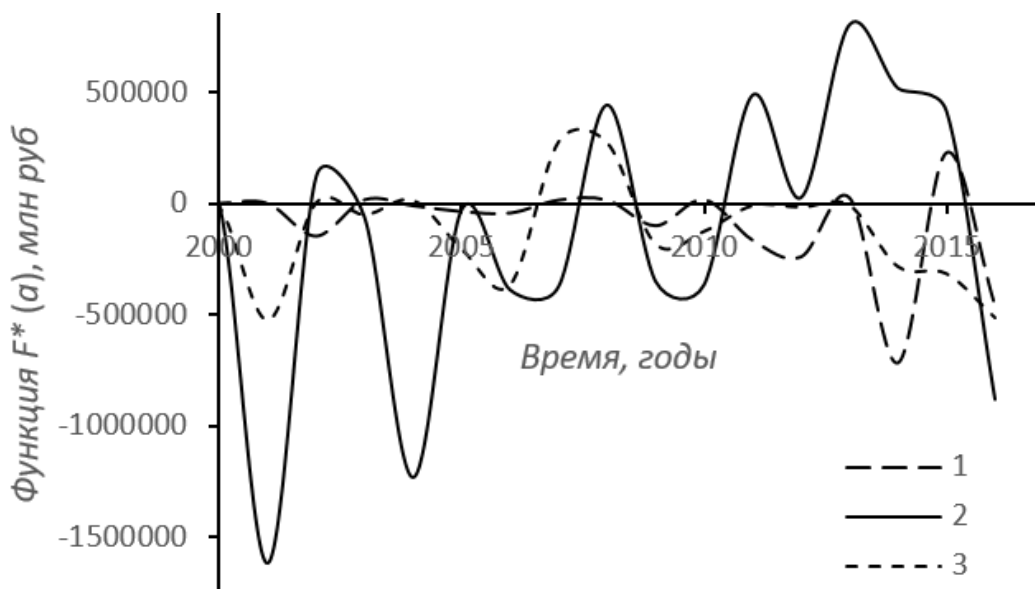


Рис. 3. Изменение величины функции организации  $F^*(a)$  во времени (годы) по регионам: 1 – Алтайский край, 2 – Свердловская область, 3 – Иркутская область.



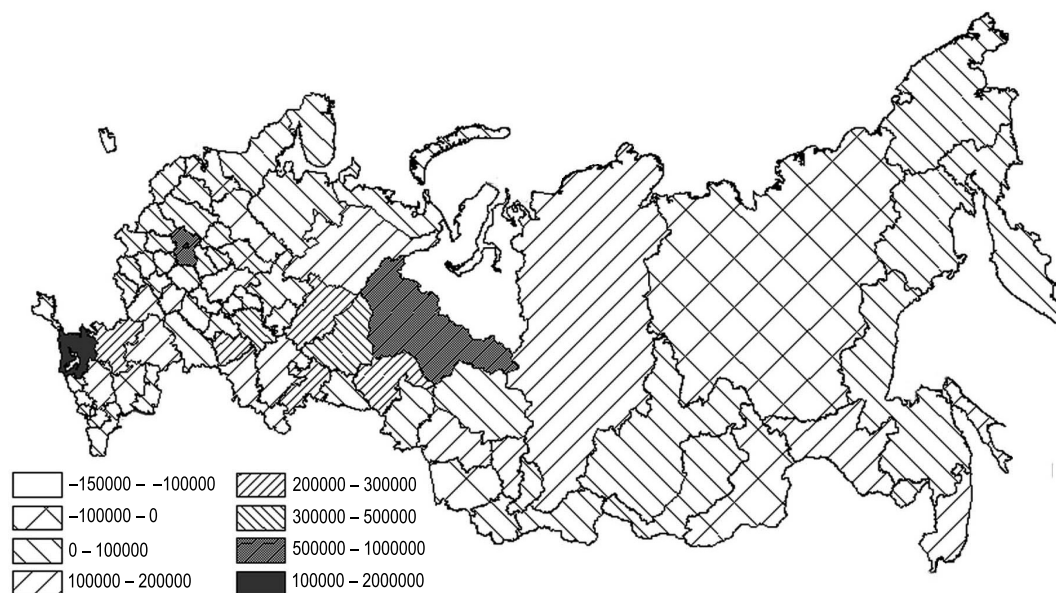
**Таблица 1.** Нормы внутренних инвестиций  $F(x_0)$  и объемов производства в промышленности  $x_{01}$  и сельском хозяйстве  $x_{02}$  (млн руб.) по регионам Сибирского ФО

Регион	$F(x_0)$	$x_{01}$	$x_{02}$
Республика Алтай	18888	2706	7017
Республика Бурятия	6018	66125	14491
Республика Тыва	6500	5595	4847
Республика Хакасия	2424	102441	9113
Алтайский край	-2843	161807	60271
Забайкальский край	-18885	-18091	202
Красноярский край	143077	650241	46184
Иркутская область	83481	503483	33931
Кемеровская область	182660	736353	33821
Новосибирская область	157477	338877	54358
Омская область	90855	467355	65328
Томская область	83195	248715	19201

$F(x_0) = a_{01}x_{01} + a_{02}x_{02} + F^*(a_0)$  – уравнение директрисы по разным ФО, и исследуется вопрос, какие территориально близкие регионы можно исключить или добавить, чтобы повысить коэффициент детерминации  $R^2$ . По сути решается задача статистического районирования по признакам условий  $F(x_0)$  билинейной связи  $F(x)$  рассматриваемых индиката  $F$  и индикаторов  $x = \{x_i\}$ . Для регионов одного ФО при его формировании в соответствии с текущими условиями ЭГС связь индикаторов и индиката должна быть линейна с коэффициентом детерминации  $R^2 > 0,5$ . Высокой неоднородностью ЭГС регионов (малыми значениями  $R^2$ ) обладают Южный ( $R^2 = 0,04$ ) и Дальневосточный ФО ( $R^2 =$

0,28). В первом округе по рассматриваемым показателям выделяется Краснодарский край, а во втором – Республика Саха (Якутия). В Северо-Западном ФО «выскакивают» Вологодская и Калининградская области, в Уральском ФО – Ямало-Ненецкий АО. Эти регионы исключаются из дальнейшего рассмотрения для повышения достоверности исследуемой многоуровневой линейной связи показателей (см. табл. 2).

На основе расчета соотношения акселерации инвестиций  $a_{021} = a_{02}/a_{01}$  как показателя приоритетов факторов роста инвестиций в виде нормы замещения объемов производств в координатах зависимости  $F^*(a_0)$  от  $a_{021}$  (см. табл. 2) выделяются три группы ФО:



**Рис. 4.** Изменение норм ВВИ  $F(x_0)$  (млн руб.) по регионам разных ФО России.

Таблица 2. Коэффициенты линейной связи норм внутренних инвестиций и объемов производства (млн руб.) по федеральным округам России

Федеральный округ	$F^*(a_0)$	$a_{01}$	$a_{02}$	$R^2$
1. Центральный	-6435	0,236	0,630	0,997
2. Северо-Западный	-15536	0,392	0,122	0,926
3. Южный	-28329	0,067	1,549	0,942
4. Северо-Кавказский	2143	0,515	1,261	0,724
5. Приволжский	-6368	0,167	0,600	0,862
6. Уральский	57613	0,199	0,516	0,871
7. Сибирский	-1195	0,239	-0,045	0,794
8. Дальневосточный	3732	0,540	2,021	0,809

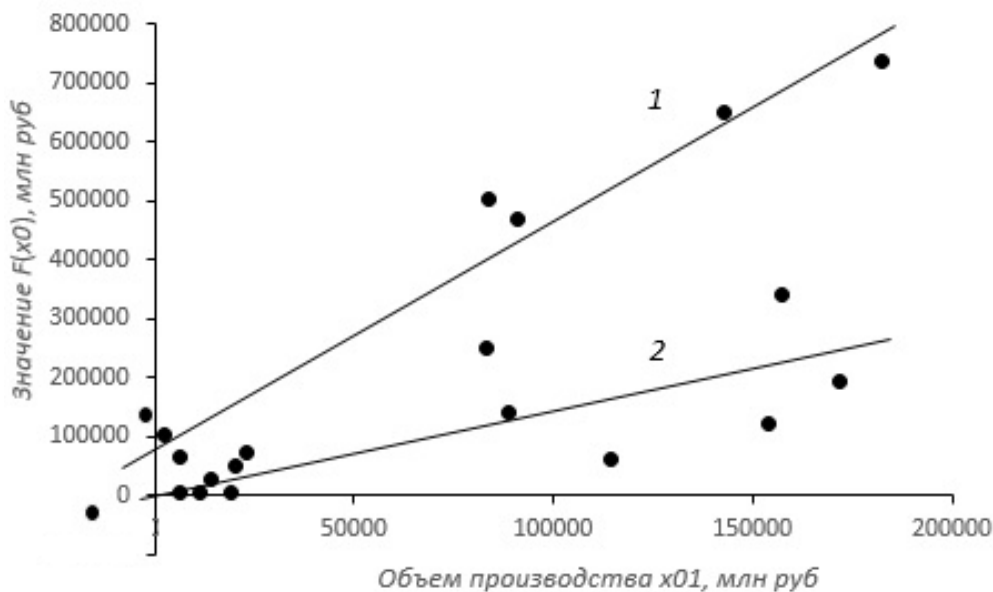


Рис. 5. Директрисы территориальной изменчивости характеристик ЭГС по Сибирскому ФО (1) и Дальневосточному ФО (2).

Точки соответствуют проекции зависимости  $F(x_0)$  на координатную плоскость  $[F(x_0), x_0]$ , линии – направлениям директрис  $F(x_0) = a_{01}x_{01} + F^*(a_0)$  (линии BC, рис. 2)

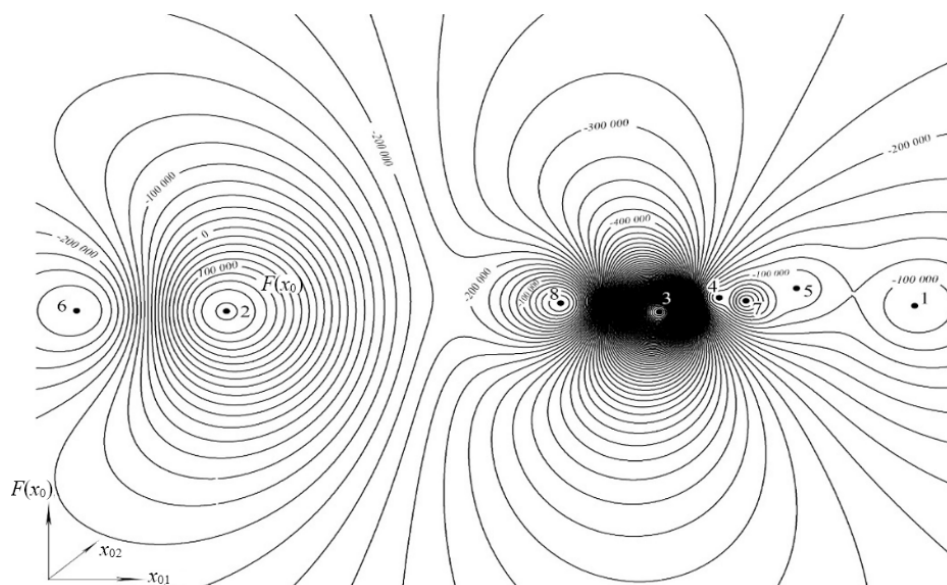
1) Южный с явным приоритетом  $a_{021} = 23,1$  сельского хозяйства и низкими показателями потенциала территориальной организации  $F^*(a_0) = -28329$  млн руб.; 2) Уральский с приоритетом промышленного производства  $a_{021} = 2,59$  и высокой организацией экономики и инвестиционного процесса  $F^*(a_0) = 57613$  млн руб.; 3) остальные округа, составляющие ядро экономического развития страны со средними значениями норм  $F^*(a_0) = -3943$ ,  $a_{021} = 2,09$ , что соответствует позиции C (рис. 2).

В иерархии регионов (без Ямало-Ненецкого АО и Краснодарского края) (данные таблиц вида 1) по всем ФО выделяется общероссийская директриса, соответствующая

линейному уравнению  $F(x_0) = 0,230x_{01} + 0,364x_{02} - 567$ ,  $R^2 = 0,934$ .

Посредством выявления значений  $F(x_0)$  на региональном, окружном и федеральном уровнях появляется возможность понять, как выглядит поверхность многообразия ЭГС с позиций связи внутренних инвестиций и объемов производства (рис. 6). Точки, лежащие на одной поверхности многообразия, образуют простую линейную гетерархическую сеть экономики страны по связи этих показателей.

**Выводы.** Вертикальные иерархические и горизонтальные гетерархические структуры и организации в природе и обществе



**Рис. 6.** Изолинии поверхности многообразия условий ЭГС России  $F(x_0)$  (в млн руб.) и положение на ней ФО:

1 – Центральный, 2 – Северо-Западный, 3 – Южный, 4 – Северо-Кавказский, 5 – Приволжский, 6 – Уральский, 7 – Сибирский, 8 – Дальневосточный.

моделируются как упорядоченные последовательности элементов, связь показателей состояния которых послойно описывается уравнениями системных  $F(x)$  и организационных

$F^*(a)$  функций отклонения показателей системы от показателей состояния среды  $y = x - x_0, f(y) = F(x) - F(x_0)$ . Наибольшие значения показателей организации потока инвестиций в производство  $F^*(a)$  достигаются в межкризисные периоды. Задача моделирования иерархий и гетерархий формулируется в понятиях дифференциации функций экономической реальности на точках многообразия природно-хозяйственной ЭГС  $F(x_0)$ . Различие функций системы и среды  $f(y) = F(x) - F(x_0)$  воспроизводится на разных уровнях организации универсальным нелинейным (билинейным) уравнением  $f(y) = a \cdot y$ , описывающим архетипические связи (пучка линий) показателей смежных уровней. Математически иерархия отображается в суперпозиции билинейных функций.

На примере анализа зависимости величины ежегодных валовых внутренних инвестиций от величины объемов промышленного и сельскохозяйственного производства регионов по данным государственного комитета статистики РФ, выявлена структура иерар-

хии характеристик ЭГС России в виде норм внутренних инвестиций и объемов производства и построена картограмма дифференциации этих норм по федеральным округам страны.

Чистые внутренние инвестиции  $f(y) = F(x) - F(x_0) = a \cdot y$  увеличивают запасы капитала предприятий и их производственные возможности, статистически рассчитываются по зависимости  $F(x)$  с учетом амортизационных отчислений и особенностей природно-хозяйственной среды региона  $F(x_0)$ . Эти значения характеризуют устойчивые нормы производства  $x_0$  и инвестирования  $F_0$ . В гетерархической организации ЭГС экономики РФ выделяется общероссийская директриса, линейно упорядочивающая ЭГС регионального, окружного и федерального уровней. Выявляются сходства и различия экономико-географических ситуаций, проблемы экономического районирования регионов по показателям исследуемой зависимости. Предлагаемая многоуровневая модель позволяет ставить и решать различные задачи региональной экономики с учетом иерархических особенностей ЭГС территорий исследования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003. 214 с.
2. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суслицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. Новосибирск: Сибирское науч. изд-во, 2007. 371 с.
3. Гурман В.И. Модели управления природными ресурсами. М.: Наука, 1981. 264 с.
4. Дилтс Р. Моделирование с помощью НЛП. СПб.: Изд-во «Питер», 1998. 300 с.
5. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 256 с.
6. Месарович М., Мако Д., Такахара Я. Теория иерархических многоуровневых систем. М: Мир, 1973. 332 с.
7. Мосунов В.П., Никульников Ю.С., Сысоев А.А. Территориальные структуры районов нового освоения. Новосибирск: Наука, 1990. 153 с.
8. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. 161 с.
9. Попович А.Ю., Цыгичко В.Н. Проблема синтеза иерархических структур управления // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 41. С. 233–246.
10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 278 с.
11. Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 360 с.
12. Угольницкий Г.А. Линейная теория иерархических систем. М.: Препринт Ин-та системного анализа РАН, 1996. 56 с.
13. Угольницкий Г.А. Иерархическое управление устойчивым развитием. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010. 336 с.
14. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Математическая формализация методов иерархического управления эколого-экономическими системами // Проблемы управления. 2007. № 4. С. 64–69.
15. Фролов Д.П. Многоуровневая иерархия экономического пространства: формирование эволюционной таксономии // Пространственная экономика. 2013. № 4. С. 122–150.
16. Хакимов Э.М. Моделирование иерархических систем. Теоретические и методологические аспекты. Казань: Казан. гос. ун-т, 1986. 160 с.
17. Хакимов Э.М. Диалектика иерархии и неиерархии в философии и научном знании. Казань: Фэн АН РТ, 2007. 288 с.
18. Черкашин А.К. Система математических моделей леса // Планирование и прогнозирование природно-экономических систем. Новосибирск: Наука, 1984. С. 46–57.
19. Черкашин А.К. Модели и методы анализа территориальной организации общества // Региональные исследования. 2016. № 1 (51). С. 23–36.
20. Черкашин А.К. Метатеоретическое системное моделирование природных и социальных процессов и явлений в неоднородной среде // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2019. № 1 (13). С. 61–84.
21. Черкашин А.К. Теоретическая и метатеоретическая география // Географический вестник. 2020. № 1(52). С. 7–21.
22. Черкашин А.К. Иерархическая классификация географических систем // Известия Иркутского государственного университета. Серия Науки о Земле. 2021. Т. 35. С. 124–152.
23. Черкашин А.К., Мядзелец А.В. Восстановление нелинейной зависимости качества жизни населения от социально-экономического потенциала регионов Сибири // География и природные ресурсы. 2014. № 4. С. 122–130.
24. Черкашин А.К., Мядзелец А.В. Характеризация развития региональной экономики с учетом макроэкономических факторов и условий // Экономика и математические методы. 2017. № 4 (53). С. 13–25.
25. Шупер В.А. Самоорганизация городского расселения. М.: Росс. открытый ун-т, 1995. 168 с.
26. Яшева Г.А. Кластерная концепция повышения конкурентоспособности предприятий в контексте сетевого сотрудничества и государственно-частного партнерства. Витебск: УО «ВГТУ», 2010. 373 с.
27. Dopfer K., Potts J. The General Theory of Economic Evolution. London, New York: Routledge, 2007. 152 p.
28. Fioretti G. Two measures of organizational flexibility // Journal of Evolutionary Economics. 2012. Vol. 22. № 5. P. 957–979.
29. Guerriero V. Power law distribution: method of multi-scale inferential statistics // Journal of Modern Mathematics Frontier (JMMF). 2012. № 1. P. 21–28.
30. Hewings G.J.D., Sonis M., Boyce D. Trade, Networks and Hierarchies: Modeling Regional and Inter-regional Economies. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 468 p.
31. Hierarchy in Natural and Social Sciences / ed. Pumain D. Netherlands: Springer, 2006. 246 p.
32. Hoskova-Mayerova S., Maturo F., Kacprzyk J. Mathematical-statistical models and qualitative theories for economic and social sciences. Cham, Switzerland: Springer International Publ., 2017. 577 p.
33. Miles R.E., Snow C.C. Fit, Failure, and the Hall of Fame. New York: The Free Press, 1994. 215 p.
34. Schroeder H. Application possibilities of the micro-meso-macro framework in economic geography // Papers in Evolutionary Economic Geography. 2011. № 11.15. P. 1–28.
35. Verspagen B. The spatial hierarchy of technological change and economic development in Europe // Annals of Regional Science. 2010. Vol. 45. P. 109–132.

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2021 г.

**Об авторах**

*Черкашин Александр Константинович* – доктор географических наук, профессор, зав. лабораторией теоретической географии Института географии им. В.Б. Сочавы СО РАН, г. Иркутск.

*Мядзелец Анастасия Викторовна* – кандидат географических наук, старший научный сотрудник лаборатории теоретической географии Института географии им. В.Б. Сочавы СО РАН, г. Иркутск.

**Для цитирования**

*Черкашин А.К., Мядзелец А.В.* Математико-статистическое моделирование иерархии и гетерархии экономико-географических систем // Региональные исследования. 2021. № 4. С. 4–17.

DOI: 10.5922/1994-5280-2021-4-1

### Mathematical and statistical modeling of hierarchy and heterarchy of economic-geographical systems

A.K. Cherkashin\*, A.V. Myadzelets\*\*

*Sochava Institute of Geography SB RAS*

\*e-mail: [cherk@mail.icc.ru](mailto:cherk@mail.icc.ru)

\*\*e-mail: [anastasia@irigs.irk.ru](mailto:anastasia@irigs.irk.ru)

The paper considers the structure of territorial economic-geographical system of Russian regions in the vertical (hierarchy) and horizontal (heterarchy) aspects using methods of mathematical modeling of a multilevel indicative function. It connects indicators of socio-economic development of regions and takes into account characteristics of the economic-geographical environment and regional spatial hierarchy. For the model calculations, we use data of dependence of the annual regional domestic investment on the volume of industrial and agricultural production from 1999 to 2018. The calculated values of investment acceleration indicators vary in time and between regions. They reflect the variability of the economic-geographical environment at the different hierarchical levels. A logical chain of regression equations statistically describes the vertical hierarchy of the Russian economic system. Linear regional trends form groups, or congruencies, with similar norms of the socio-economic environment at the federal okrug level. The congruencies shape the all-Russian directive surface, or directress, and demonstrate diversity of the levels and directions of region development. Described in terms of the relationship between domestic investment and production volumes, the structure reflects the hierarchy of the Russian economic system at the regional, okrug and state levels and forms spatial heterarchical network of similarity of economic growth potentials.

*Key words:* hierarchical structure, heterarchy, territorial system, region, investment process, economic-geographical environment, mathematical modeling

**REFERENCES**

1. Voronin A.A. Mishin S.P. *Optimal'nye ierarhicheskie struktury* [Optimal hierarchical structures]. Moscow: IPU RAN, 2003. 214 p. (In Russ.)
2. Granberg A.G., Suslov V.I., Suspitsin S.A. *Mnogoregionalnie sistemy: ekonomiko-matematicheskoe issledovanie* [Multi-regional systems: economic and mathematical research]. Novosibirsk: Siberian Scientific Publ., 2007. 371 p. (In Russ.)
3. Gurman V.I. *Modeli upravleniya prirodnyimi resursami* [Natural resource management models]. Moscow: Nauka, 1981. 264 p. (In Russ.)
4. Dilts R. *Modelirovanie s pomoshyu NLP* [Modeling with NLP]. Sankt-Peterburg: Publ. «Piter», 1998. 300 p. (In Russ.)
5. Kamke E. *Spravochnik po differentsialnym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [A handbook on first-order partial differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1966. 256 p. (In Russ.)
6. Mesarovic M.D., Macko D., Takahara Y. *Teoriya ierarhicheskikh mnogourovnevnikh sistem* [Theory of hierarchical, multilevel systems]. Moscow: Mir, 1973. 332 p. (In Russ.)
7. Mosunov V.P., Nikul'nikov Yu.S., Sysoev A.A. *Territorial'nye struktury rajonov novogo osvoeniya* [Territorial structures of new development areas]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1990. 153 p. (In Russ.)
8. Novikov D.A. *Mekhanizmy funktsionirovaniya mnogourovnevnikh organizatsionnikh sistem* [Mechanisms of functioning of multilevel organization systems]. Moscow: Found «Problemy upravleniya», 1999. 161 p. (In Russ.)

9. Popovich A.Yu., Tsygichko V.N. The problem of synthesis of hierarchical control structures. *Trudy Instituta systemnogo analiza RAN*, 2009, vol. 41, p. 233–246. (In Russ.)
10. Saati T. *Prinyatie reshenii. Metod analiza ierarkhiy* [Making decisions. Hierarchy analysis method]. Moscow: Radio i svyaz Publ., 1993. 278 p. (In Russ.)
11. Saati T. *Prinyatie resheniy pri zavisimostyakh i obratnikh svyazyakh: analiticheskie seti* [Dependency and Feedback Decision Making: Analytical Networks]. Moscow: LKI Publ., 2008. 360 p. (In Russ.)
12. Ugolnitskii G.A. *Lineinaya teoria ierarkhicheskikh system* [Linear theory of hierarchical systems]. Moscow: Institute of System Analysis RAS, 1996. 56 p. (In Russ.)
13. Ugolnitskii G.A. *Ierarkhicheskoye upravlenie ustoychivym razvitiem* [Hierarchical management of sustainable development]. Moscow: Izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 2010. 336 p. (In Russ.)
14. Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Mathematical formalization of hierarchical control methods for environmental-economic systems. *Problemy upravleniya*, 2007, no. 4, pp. 64–69. (In Russ.)
15. Frolov D.P. Multilevel hierarchy of economic space: formation of evolutionary taxonomy. *Prostranstvennaya ekonomika*, 2013, no. 4, pp. 122–150. (In Russ.)
16. Khakimov E.M. *Modelirovanie ierarkhicheskikh system. Teoreticheskie i metodologicheskie aspekty* [Modeling of hierarchical systems. Theoretical and methodological aspects]. Kazan: Kazan. State Univ., 1986. 160 p. (In Russ.)
17. Khakimov E.M. *Dialektika ierarkhii i neierarkhii v filosofii i nauchnom znanii* [Dialectics of hierarchy and non-hierarchy in philosophy and scientific knowledge]. Kazan: Fen Publ. AN RT, 2007. 288 p. (In Russ.)
18. Cherkashin A.K. System of mathematical forest models. In: *Planirovanie i prognozirovanie prirodno-ekonomicheskikh sistem* [Planning and forecasting of natural and economic systems]. Novosibirsk: Nauka, 1984, pp. 46–57. (In Russ.)
19. Cherkashin A.K. Theory, models and methods for analysis on the territorial organization society. *Regional'nye issledovaniya*, 2016, no. 1 (51), pp. 23–36. (In Russ.)
20. Cherkashin A.K. Metatheoretical system modelling of natural and social processes and phenomena in heterogeneous environment. *Informatsionnie i matematicheskie tekhnologii v nauke i obrazovanii*, 2019, no. 1 (13), pp. 61–84. (In Russ.)
21. Cherkashin A.K. Theoretical and metatheoretical geography. *Geograficheskii vestnik*, 2020, no. 1(52), pp. 7–21. (In Russ.)
22. Cherkashin A.K. Hierarchical classification of geographical systems // *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Nauki o Zemle*, 2021, vol. 35, pp. 124–152. (In Russ.)
23. Cherkashin A.K., Myadzelets A.V. Restoration of the nonlinear dependence of the quality of life of the population on the socio-economic potential of the regions of Siberia. *Geografia i prirodniye resursy*, 2014, no. 4, pp. 122–130. (In Russ.)
24. Cherkashin A.K., Myadzelets A.V. Characterization of regional economic development in response to macroeconomic factors and conditions. *Ekonomika i matematicheskie metody*, 2017, vol. 53, no. 4, pp. 13–25. (In Russ.)
25. Shuper V.A. *Samoorganizatsia gorodskogo rasseleniya* [Self-organization of urban settlement]. Moscow: Russian Open University, 1995. 168 p. (In Russ.)
26. Yasheva G.A. *Klasternaya kontseptsia povysheniya konkurentosposobnosti predpriyatiy v kontekste setevogo sotrudnichestva i gosudarstvenno-chastnogi partnyorstva* [Cluster concept of increasing the competitiveness of enterprises in the context of network cooperation and public-private partnership]. Vitebsk: VGTU, 2010. 373 p. (In Russ.)
27. Dopfer K., Potts J. *The General Theory of Economic Evolution*. London, New York: Routledge, 2007. 152 p.
28. Fioretti G. Two measures of organizational flexibility. *Journal of Evolutionary Economics*, 2012, vol. 22, no. 5, pp. 957–979.
29. Guerriero V. Power law distribution: method of multi-scale inferential statistics. *Journal of Modern Mathematics Frontier (JMMF)*, 2012, no. 1, pp. 21–28.
30. Hewings G.J.D., Sonis M., Boyce D. *Trade, Networks and Hierarchies: Modeling Regional and Inter-regional Economies*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 468 p.
31. *Hierarchy in Natural and Social Sciences*. Pumain D., ed. Netherlands: Springer, 2006. 246 p.
32. Hoskova-Mayerova S., Maturo F., Kacprzyk J. *Mathematical-statistical models and qualitative theories for economic and social sciences*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2017. 577 p.
33. Miles R.E., Snow C.C. *Fit, Failure, and the Hall of Fame*. New York: The Free Press, 1994. 215 p.
34. Schröder H. Application possibilities of the micro-meso-macro framework in economic geography. *Papers in Evolutionary Economic Geography*, 2011, no. 11.15, pp. 1–28.
35. Verspagen B. The spatial hierarchy of technological change and economic development in Europe. *Annals of Regional Science*, 2010, vol. 45, pp. 109–132.

Received 15.11.2021